Оглавление

[Исторические справки. 2](#_Toc305250064)

[Глава I. Теорема Чевы. 3](#_Toc305250065)

[Глава II. Теорема Менелая. 8](#_Toc305250066)

# Исторические справки.

**Джованни Чева** (*родился 7 декабря 1648 года; умер 15 июня 1734 года*) родился в Милане в семье богатых и высокочтимых родителей. Учился он в университетах Пизы и Турина. Затем был служащим у эрцгерцога города Мантуя, одновременно занимаясь математикой. Сохранились три его книги. Одна из них посвящена законам движения маятника, параллелограмму сил и поведению тел в потоке воды. Вторая посвящена геометрическим аспектам движения. В третьей разработан метод доказательства геометрических теорем, основанный на рассмотрении соотношений между центрами тяжести соответствующих фигур. Именно в этой книге и содержится теорема, носящая его имя.

Рис. 16



**Менелай Александрийский** жил в первом столетии нашей эры. Родился он в Александрии, но жил и работал в Риме. Его главные труды посвящены сферической геометрии и тригонометрии, а также их приложениям к астрономии. Все эти работы в дальнейшем существенным образом были использованы знаменитым астрономом Клавдием Птолемеем, трудившимся в крупнейшем в то время научном центре в городе Александрия.

Менелай открыл и некоторые теоремы планиметрии. Одна из них носит его имя.

Рис. 17

# Глава I. Теорема Чевы.

**Теорема Чевы.** Если через вершины проведены прямые , , , пересекающие противоположные стороны (или их продолжения) в точках , , , то для того чтобы эти прямые пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

1. **Докажем, что если прямые** , , **пересекаются в одной точке, то выполняется равенство:**

Доказательство 1. Нам надо рассмотреть два случая: когда точки , , лежат непосредственно на сторонах треугольника и когда две из этих точек лежат на продолжениях сторон треугольника.

1. Рассмотрим первый случай (рис. 3). Нам дано, что , , пересекаются в одной общей точке . Нужно доказать, что выполняется условие (\*)
2. Рассмотрим и . Основания и лежат на одной прямой (прямой ), а вершина общая. Поэтому у этих треугольников будет и общая высота , значит, их площади относятся как основания:

Рис. 18

Аналогичным образом найдём:

Из равенств (1) и (2) следует, что площади и и площади их частей – и находятся в одном и том же отношении. Поэтому и вторые части и должны иметь площади, находящиеся в таком же отношении:

1. Аналогичным образом найдём:
2. Перемножая равенства (3), (4) и (5), получаем, что:

Условие, которое мы сейчас доказали, можно сформулировать и по-другому. Сам Джованни Чева, например, необходимость этого условия изложил так: *если из вершин треугольника проведены секущие, пересекающиеся в одной точке и делящие противоположные стороны на два отрезка, то произведение отрезков, не имеющих общих концов, равно произведению их дополнений.*

1. Рассмотрим теперь второй случай, когда из трёх точек , , две лежат на продолжениях противоположных сторон треугольника, и только одна лежит непосредственно на стороне этого треугольника (рис. 4).

Рис. 19

Пусть пересекает сторону в точке ; пересекает продолжение стороны в точке ; а пересекает продолжение стороны в точке .

1. Рассмотрим и .

Так как эти треугольники имеют общее основание , то площади и относятся как высоты и :

1. Рассмотрим теперь и .

– общий угол для и ;

, так как и , и – высоты и соответственно.

Следовательно, по двум углам.

Итак, – коэффициент подобия:

1. Исходя из всего вышесказанного, мы получаем, что:
2. Сравнив теперь и , аналогичным образом найдём:

Последнее же отношение оценим так же, как это делали в предыдущем доказательстве:

Перемножая последние три равенства, найдём:

**Доказано (\*).**

Эту теорему можно доказать другим способом.

Доказательство 2.

1. Рассмотрим сначала первый случай, когда прямые проходят внутри треугольника и поэтому пересекают сами стороны, а не их продолжения (рис. 5).

Нам дано, что все три прямые , , пересекаются в одной общей точке .

Нужно доказать:

1. и имеют общую высоту. Поэтому площади этих треугольников относятся как их основания и , то есть:
2. Аналогичным образом получим:

A

Рис. 20

1. Перемножим три равенства:
2. Рассмотрим второй случай (из трёх точек , , точки , лежат на продолжениях противоположных сторон – и соответственно, и только одна (точка ) лежит непосредственно на стороне треугольника – стороне ) (рис. 6).

Рис. 21

Перемножая эти равенства, получим:

**Доказано (\*).**

1. **Докажем, что если для точек** , , , **лежащих на сторонах** , , **или на их продолжениях соответственно**, **выполняется равенство:**

**то прямые** , , **пересекаются в одной общей точке (\*).**

Рис. 22

Дано:

Доказать, что все три прямые

, , пересекаются в одной общей точке .

Доказательство.

Докажем, что все три прямые , , пересекаются в одной общей точке .

Обозначим точку пересечения прямых и через (рис. 7). Прямые и пересекаются, так как .

Предположим, что не проходит через точку (как это показано на рисунке 7). Тогда проведём отрезок такой, что .

Докажем теперь, что точка совпадает с точкой .

Так как , и проходят через общую точку , то по доказанному ранее получим, что:

А по условию:

Следовательно,

И, значит, (точки , , лежат на одной прямой ). Точки и совпадают, , поэтому прямая проходит через точку .

**Доказано (\*).**

# Глава II. Теорема Менелая.

**Теорема Менелая.** Если на сторонах или на их продолжениях отмечены точки , , так, что лежит на , – на и – на , то эти точки будут лежать на одной прямой тогда и только тогда, когда выполнено условие:

1. **Докажем, что если точки** , , **лежат на одной прямой, то выполняется равенство:**

Дано: точки , , лежат на одной прямой.

Доказать: выполнено условие (\*).

Возможны два случая: (*А*) – прямая, на которой лежат точки , , пересекает стороны треугольника; (*B*) – эта прямая проходит вне треугольника. Рассмотрим оба случая.

Доказательство 1 для случая (*А*).

Сделаем дополнительное построение: проведём отрезок (рис. 8). Введём обозначения отрезков, указанных на рисунке. Тогда условие (\*), которое мы должны доказать, примет вид:

Рис. 23

1. Рассмотрим и .

– общий угол для и ;

как соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых и ( по дополнительному построению) секущей , .

Следовательно, по двум углам.

Итак, – коэффициент подобия:

И, значит,

1. Рассмотрим и .

как вертикальные углы;

как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых и ( по дополнительному построению) секущей , , .

Следовательно, по двум углам.

Итак, – коэффициент подобия:

И, значит,

1. Приравняем полученные значения :

то есть,

Доказательство 1 для случая (*B*).

Прямая, на которой лежат точки , , , проходит вне (рис. 9).

Рис. 24

Сделаем дополнительное построение: проведём отрезок (рис.9).

1. Рассмотрим и .

– общий угол для и ;

как соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых и ( по дополнительному построению) секущей .

Следовательно, по двум углам.

Итак, – коэффициент подобия:

1. Рассмотрим и .

– общий угол для и ;

как соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых и ( по дополнительному построению) секущей .

Следовательно, по двум углам.

Итак, – коэффициент подобия:

1. Перемножим эти равенства и умножим обе части получившегося при этом равенства на :

Здесь, правая часть этого равенства равна 1. Поэтому:

**Доказано (\*).**

Эту теорему можно доказать другим способом.

Доказательство 2 для случая (*А*).

Необходимость условия (\*) можно доказать и по-другому.

Нам дано, что точки , , лежат на одной прямой . На эту прямую опустим перпендикуляры из точек , , и обозначим их , , (рис. 10).

Из подобия образовавшихся прямоугольных треугольников находим:

Перемножая эти равенства, находим:

Рис. 25

Доказательство 2 для случая (*B*).

Доказательство аналогично предыдущему. Из точек , , снова опускаем перпендикуляры на прямую (рис. 11) и из подобия образовавшихся треугольников, находим:

Перемножая эти равенства, получим:

Рис. 11

Рис. 26

**Доказано (\*).**

1. **Докажем, что если для точек** , , , **лежащих на сторонах** , , **или на их продолжениях соответственно**, **выполняется равенство:**

**то точки** ,, **лежат на одной прямой.**

Дано:

Доказать, что точки ,, лежат на одной прямой.

Рис. 27

Доказательство.

Докажем, что все три точки ,, лежат на одной прямой.

Предположим, что точка не лежит на прямой , тогда через точки и проведём прямую. Она пересечёт сторону в некоторой точке .

Докажем теперь, что точка совпадает с точкой .

Так как точки ,, лежат на одной прямой, то по доказанному ранее:

А по условию:

Следовательно,

И, значит, (точки , , лежат на одной прямой ).

Отсюда следует, что точки и совпадают, , поэтому все три точки ,, лежат на одной прямой.

**Доказано (\*).**