МОУ «Лицей №3»

Тема реферата:

Применение теорем Чевы и Менелая для решения планиметрических задач. Сравнительный анализ в эффективности применения этих теорем по сравнению с другими способами решения планиметрических задач.

Выполнил: Димитров Денис Валерьевич,

ученик 11«А» класса.

Научный руководитель: Шабунина Е.И.,

учитель математики МОУ «Лицей №3».

Коды авторов: №SC-4785 и №SC-4786.

г. Саров, 2011 год.

Оглавление.

[Введение. 3](#_Toc304162637)

[Основная часть. 4](#_Toc304162638)

[Глава I. Теоремы Чевы и Менелая. 4](#_Toc304162639)

[Глава II. Применение теорем Чевы и Менелая для решения планиметрических задач. Сравнительный анализ в эффективности применение этих теорем по сравнению с другими способами решения планиметрических задач. 5](#_Toc304162640)

[I блок задач (замечательные точки треугольника). 5](#_Toc304162641)

[II блок задач (пропорциональные отрезки). 11](#_Toc304162642)

[III блок задач (отношение площадей). 16](#_Toc304162643)

[Заключение. 23](#_Toc304162644)

[Список используемой литературы. 23](#_Toc304162645)

# Введение.

В курсе геометрии седьмых, восьмых и девятых классов были рассмотрены важные и интересные свойства геометрических фигур на плоскости. Но многие удивительные соотношения и изящные геометрические факты не вошли в основной курс.

Из школьного курса нам известны теоремы о замечательных точках в треугольнике, о том, что биссектрисы (медианы, высоты) треугольника пересекаются в одной точке. А ведь эти свойства являются следствиями из теорем Чевы и Менелая.

Теорема Менелая красива и проста. В школьном курсе эта теорема затерялась где-то среди задач. Между тем она входит в золотой фонд древнегреческой математики. Эта теорема дошла до нас в арабском переводе книги «Сферика» Менелая Александрийского.

Теоремы Чевы и Менелая в школь­ном курсе математики изучаются лишь в классах с углубленным изучением ма­тематики. Между тем, эти теоремы по­зволяют легко и изящно решить целый класс задач. Многие задачи по планиметрии, предлагаемые на вступительных экзаменах в вузы, в заочные математические школы можно решить с помощью именно этих теорем.

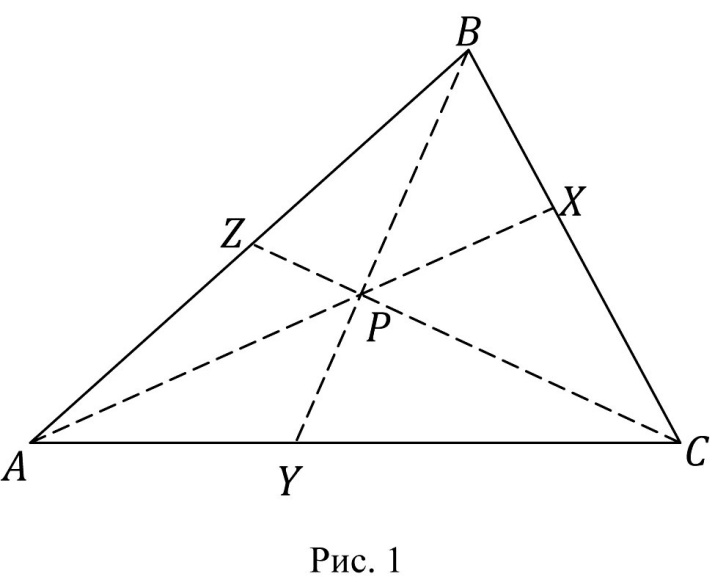
Цель работы – изучить теоремы Чевы и Менелая и рассмотреть применение этих теорем к решению планиметрических задач.

Задачей работы стало сравнение и выявление эффективности применения теорем Чевы и Менелая по сравнению с другими способами решения планиметрических задач.

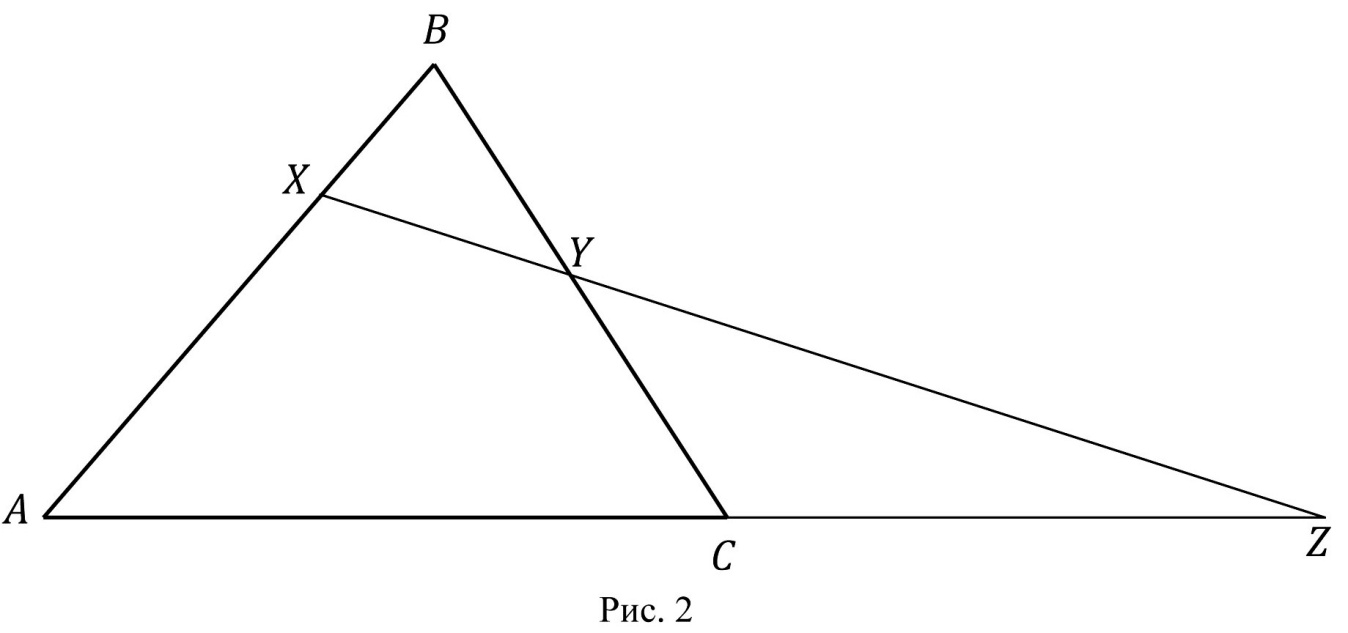
# Основная часть.

# Глава I. Теоремы Чевы и Менелая [4].

**Теорема Чевы.** Если через вершины проведены прямые , , , пересекающие противоположные стороны (или их продолжения) в точках , , , то для того чтобы эти прямые пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (см. рис.1):

**

**Теорема Менелая.** Если на сторонах или на их продолжениях отмечены точки , , так, что лежит на , – на и – на , то эти точки будут лежать на одной прямой тогда и только тогда, когда выполнено условие (см.рис.2):

****

*Доказательства соотношений (\*) и (\*\*), а также исторические справки о Джованни Чева и Менелае Александрийском содержатся в Приложении1*

# Глава II. Применение теорем Чевы и Менелая для решения планиметрических задач. Сравнительный анализ в эффективности применение этих теорем по сравнению с другими способами решения планиметрических задач [2], [5].

Теоремы Чевы и Менелая в школь­ном курсе математики изучаются лишь в классах с углубленным изучением ма­тематики. Между тем, эти теоремы по­зволяют легко и изящно решить целый класс задач. Многие задачи по планиметрии, предлагаемые на вступительных экзаменах в вузы, в заочные математические школы можно решить с помощью именно этих теорем.

На примере следующих задач (задач на замечательные точки треугольника, на пропорциональные отрезки и на отношение площадей) покажем эффективность применения теорем Чевы и Менелая по сравнению с другими способами решения планиметрических задач.

# I блок задач (замечательные точки треугольника).

**Задача 1.**

Доказать, что **биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.**

Дано: , – биссектрисы .

Доказать, что биссектрисы и пересекаются в одной точке – точке .

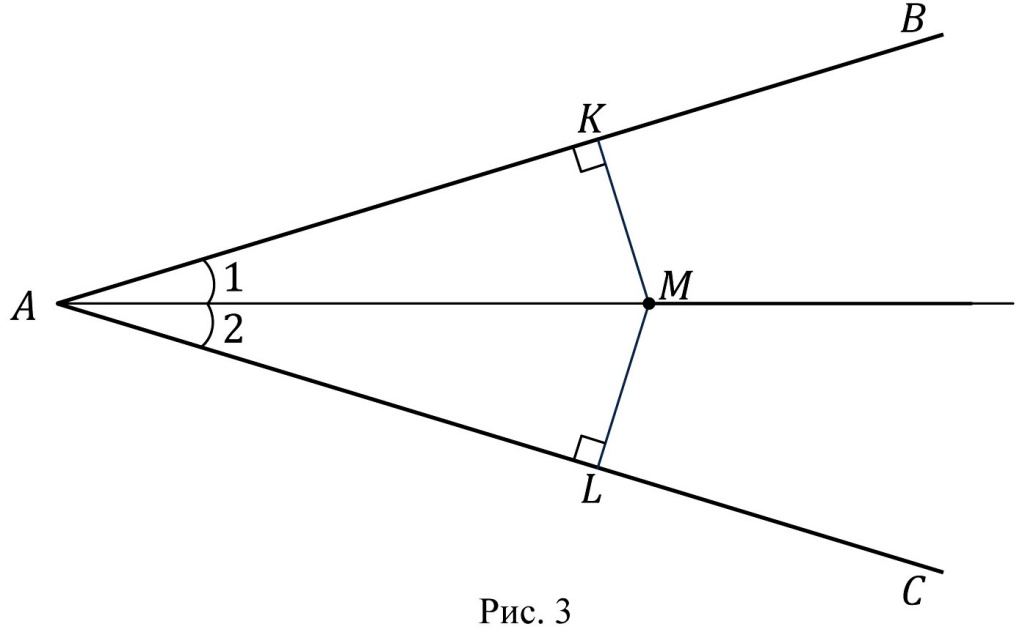
**Решение.**

I способ (без использования теоремы Чевы)

1. Докажем сначала теорему о биссектрисе угла.

ТЕОРЕМА.

**Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон.**

Обратно: **каждая точка, лежащая внутри угла и равноудалённая от сторон угла, лежит на его биссектрисе.**

1. Дано: , – биссектриса , – произвольная точка на биссектрисе , .

Доказать, что .

**Доказательство.**

1. Сделаем дополнительное построение: проведём перпендикуляры и к лучам и соответственно (рис. 13).
2. Рассмотрим прямоугольные и (, так как и ).

– общая гипотенуза;

, так как по условию – биссектриса .

Следовательно, прямоугольные по гипотенузе и острому углу.

Значит, как соответственные элементы в равных треугольниках, то есть .

**Доказано.**

1. Дано: , т. лежит во внутренней области , , , , , .

Доказать, что – биссектриса .

**Доказательство.**

Рассмотрим прямоугольные и (, так как и ).

– общая гипотенуза;

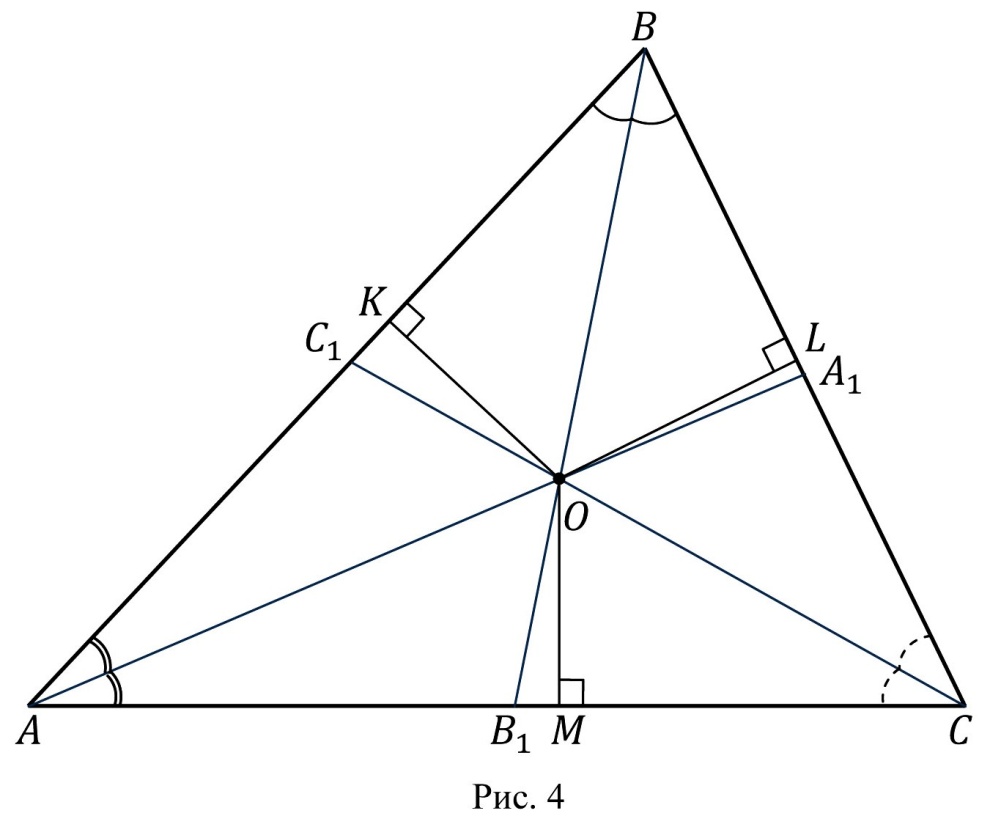
, так как по условию .

Следовательно, прямоугольные по гипотенузе и катету.

Значит, как соответственные элементы в равных треугольниках, и – биссектриса по определению биссектрисы угла.

**Доказано.**

1. Итак, теперь докажем **следствие** из этой теоремы, то есть то, что **биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.**

****

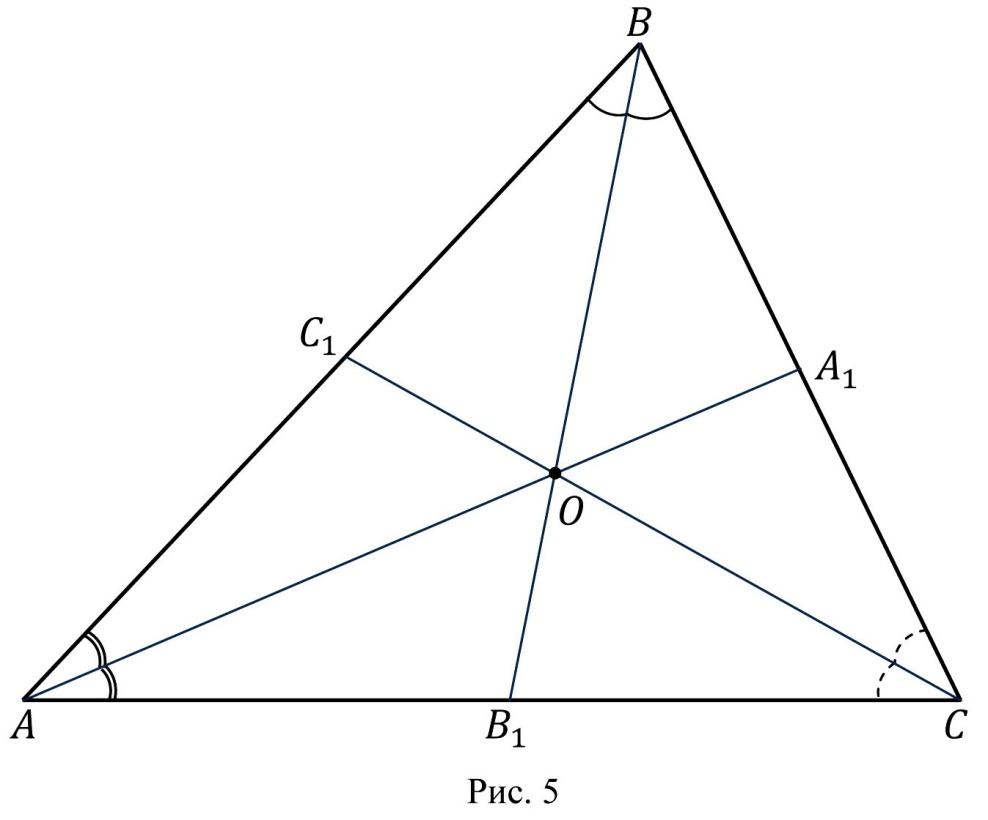
1. Рассмотрим произвольный . Обозначим точкой точку пересечения его биссектрис и . Биссектрисы и пересекаются, так как .

Сделаем дополнительные построения: проведём , , (рис. 14).

1. По доказанной теореме и ( и – биссектрисы ). Поэтому , то есть точка равноудалена от сторон и, значит, лежит на биссектрисе этого угла.

Следовательно, все три биссектрисы – – пересекаются в точке .

**Доказано.**

II способ (с использованием теоремы Чевы).

1. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону этого треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Так как по условию – биссектриса , то:

Так как по условию – биссектриса , то:

Так как по условию – биссектриса , то:

1. Перемножая получившиеся равенства (3), (1) и (2), получаем, что:

Отсюда по теореме Чевы, биссектрисы пересекаются в одной точке – точке .

**Доказано.**

**Задача 2.**

Доказать, что **медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.**

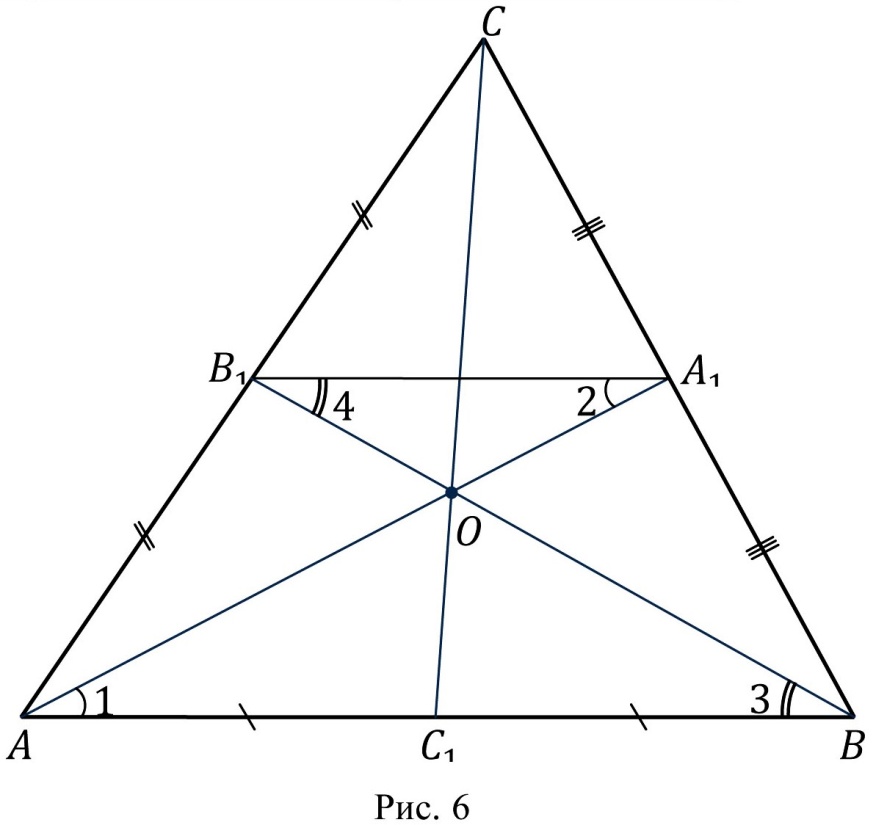
Дано: , – медианы .

Доказать, что:

* 1. медианы и пересекаются в одной точке – точке ;
  2. .

**Решение.**

I способ (без использования теорем Чевы и Менелая).



1. Рассмотрим произвольный . Обозначим точкой точку пересечения его медиан и . Медианы и пересекаются, так как .

Сделаем дополнительное построение: проведём отрезок (рис. 16).

Так как и – медианы , то точки и являются серединами сторон и соответственно, то есть , .

Отсюда, по определению средней линии треугольника (средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон) отрезок является средней линией .

Так как средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны, то отрезок и .

1. Рассмотрим и .

как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых и ( по доказанному) секущей ;

как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых и ( по доказанному) секущей .

Следовательно, по двум углам, и, значит, их стороны пропорциональны.

Итак, – коэффициент подобия:

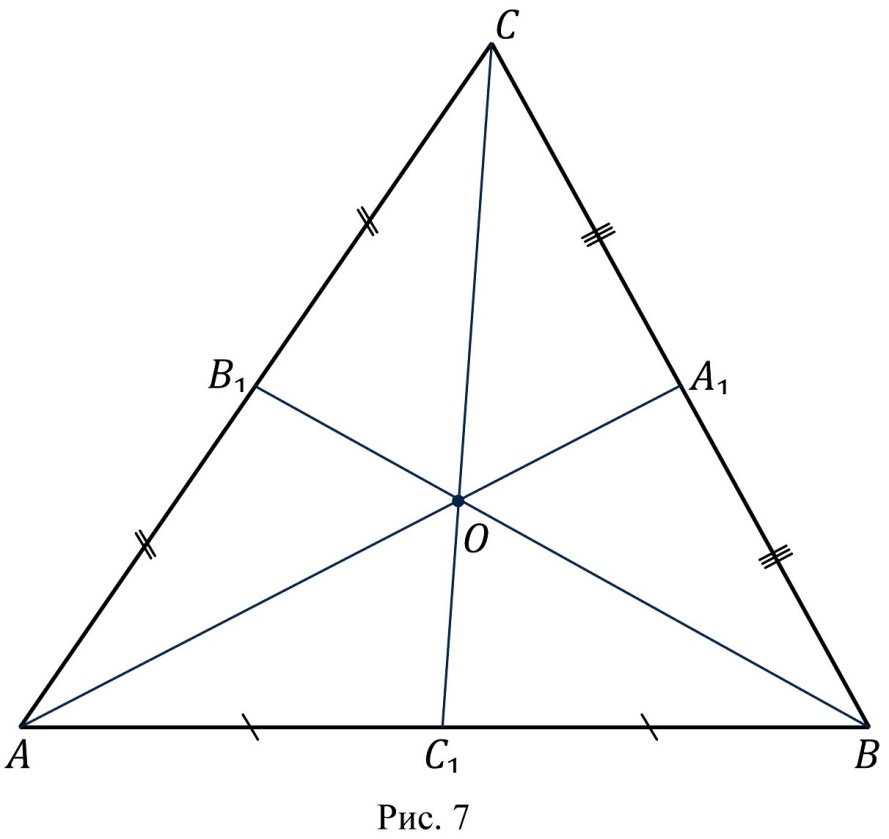
Но по доказанному ; , поэтому и , . Таким образом, точка пересечения медиан и делит каждую из них в отношении , считая от вершины.

1. Аналогично доказывается, что точка пересечения медиан и делит каждую из них в отношении , считая от вершины, и, следовательно, совпадает с точкой .

Итак, все три медианы пересекаются в точке и делятся ею в отношении , считая от вершины.

**Доказано**

II способ (с использованием теорем Чевы и Менелая).



1. Так как по условию – медианы , то , , , поэтому:

Итак,

Отсюда по теореме Чевы, медианы пересекаются в одной точке – точке .

1. Рассмотрим .

Прямая пересекает две стороны (, ) и продол­жение третьей ( – луч, ), значит, по теореме Менелая:

И, значит,

1. Рассматривая теорему Менелая для и секущей , а также для и секущей , мы получим, что:

Итак, все три медианы пересекаются в точке и делятся ею в отношении , считая от вершины.

**Доказано.**

# II блок задач (пропорциональные отрезки).

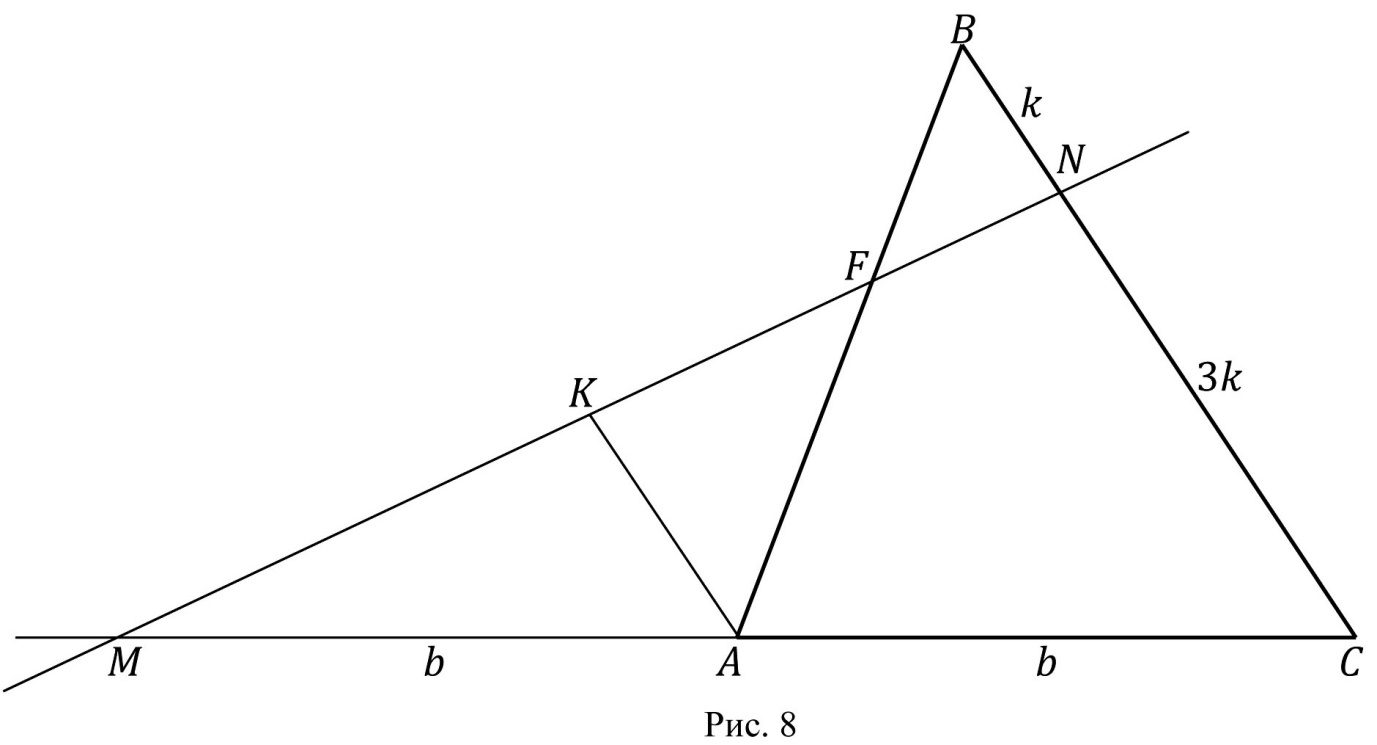
**Задача 3.**

В на стороне взята точ­ка так, что . На продолжении стороны за точку взята точка так, что *.* Пря­мая пересекает сторо­ну в точке *.* Найтиотношение .

Дано: , , , – луч, , , .

Найти отношение .

**Решение.**

I способ (без использования теоремы Менелая).

Сделаем дополнительное построение: проведём отрезок (рис. 18).

Пусть , тогда по условию (): ; пусть , тогда по условию (): .

1. Рассмотрим и .

– общий угол для и ;

как соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых и ( по дополнительному построению) секущей , .

Следовательно, по двум углам.

Итак, – коэффициент подобия:

И, значит,

1. Рассмотрим и .

как вертикальные углы;

как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых и ( по дополнительному построению) секущей , , .

Следовательно, по двум углам.

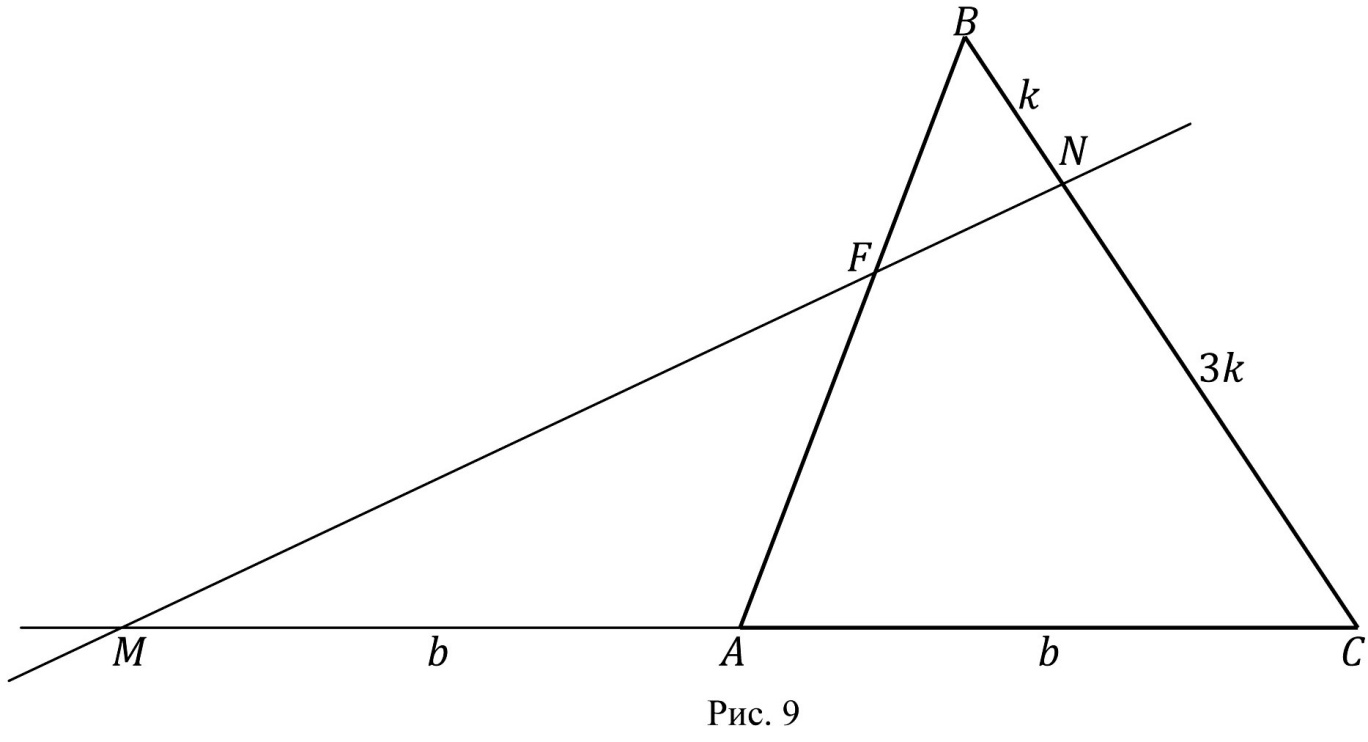
Итак, – коэффициент подобия:

Но, так как по доказанному:

то мы получаем, что:

Ответ: .

II способ (c использованием теоремы Менелая).

****

Пусть , тогда по условию (): ; пусть , тогда по условию (): .

Прямая пересекает две стороны (, ) и продол­жение третьей ( – луч, ), значит, по теореме Менелая:

И, значит,

Ответ: .

**Задача 4.**

На стороне взята точка , а на стороне взята точка , причём . Точка пересечения отрезков и делит в отношении , считая от точки . Найти отношение .

Дано: , , , , , .

Найти отношение .

**Решение.**

I способ (без использования теоремы Менелая).



Сделаем дополнительное построение: проведём отрезок (рис. 20).

Пусть , тогда по условию (): ; пусть , тогда по условию ( ): .

1. Рассмотрим и .

– общий угол для и ;

как соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых и ( по дополнительному построению) секущей , .

Следовательно, по двум углам.

Итак, – коэффициент подобия:

И, значит,

1. Рассмотрим и .

как вертикальные углы;

как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых и ( по дополнительному построению) секущей , .

Следовательно, по двум углам.

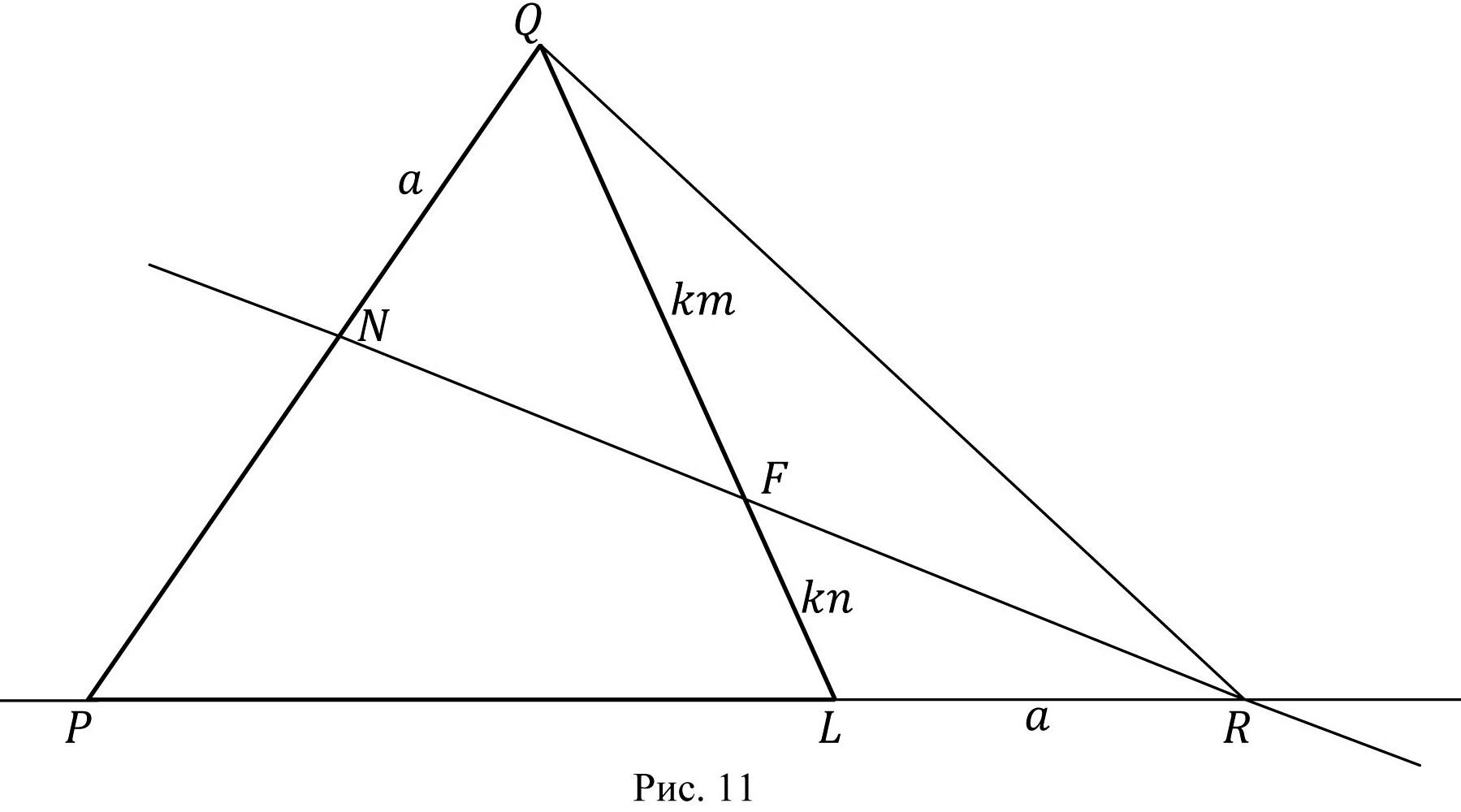
Итак, – коэффициент подобия:

Но, так как по доказанному:

то мы получаем, что:

Ответ: .

II способ (c использованием теоремы Менелая).

****

Пусть , тогда по условию (): ; пусть , тогда по условию ( ): .

Прямая пересекает две стороны (, ) и продол­жение третьей ( – луч, ), значит, по теореме Менелая:

И, значит,

Ответ: .

# III блок задач (отношение площадей).

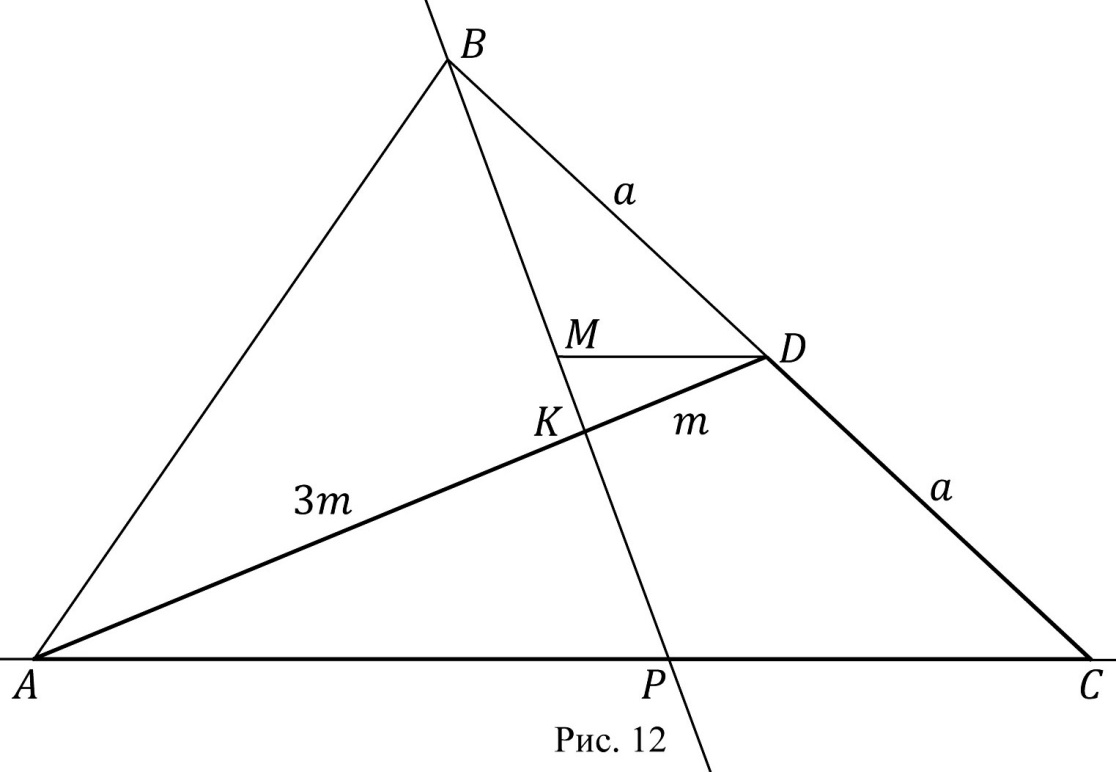
**Задача 5.**

Пусть медиана . На медиане взята точка так, что . Прямая разбивает на два треугольника: и , причём . Найти отношение .

Дано: , – медиана , , , – прямая, .

Найти отношение .

**Решение.**

I способ (без использования теоремы Менелая).

Сделаем дополнительное построение: проведём отрезок (рис.22).

Пусть , тогда по условию ( медиана ): ; пусть , тогда по условию ( ): .

1. Рассмотрим и . Основания и лежат на одной прямой (прямой ), а вершина общая. Поэтому у этих треугольников будет и общая высота , значит,
2. Рассмотрим и .

– общий угол для и ;

как соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых и ( по дополнительному построению) секущей , .

Следовательно, по двум углам.

Итак, – коэффициент подобия:

И, значит,

1. Рассмотрим и .

как вертикальные углы;

как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых и ( по дополнительному построению) секущей , .

Следовательно, по двум углам.

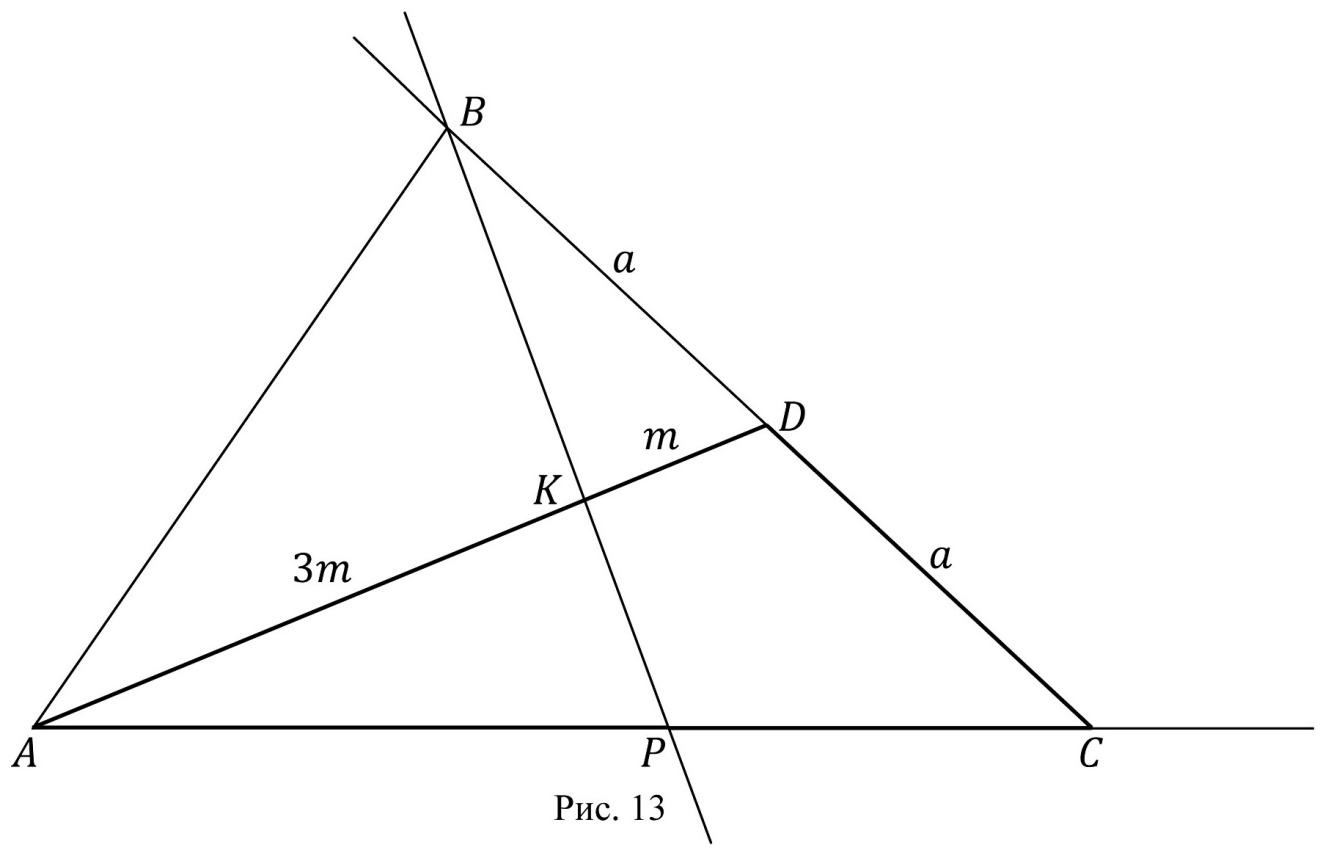
Итак, – коэффициент подобия:

Но, так как по доказанному:

то мы получаем, что:

1. Итак,

Ответ: .

II способ (c использованием теоремы Менелая).

Пусть , тогда по условию ( медиана ): ; пусть , тогда по условию ( ): .

1. Рассмотрим и . Основания и лежат на одной прямой (прямой ), а вершина общая. Поэтому у этих треугольников будет и общая высота , значит,
2. Прямая пересекает две стороны (, ) и продол­жение третьей ( – луч, ), значит, по теореме Менелая:

И, значит,

1. Итак,

Ответ: .

**Задача 6.**

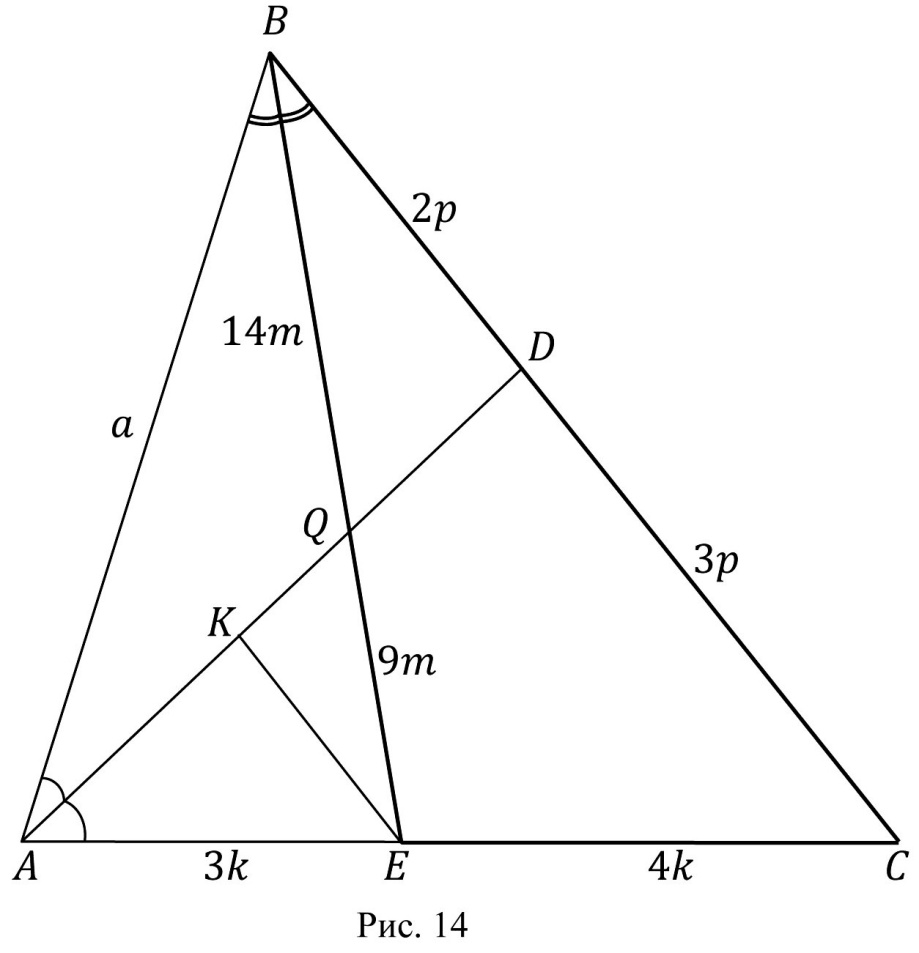
Биссектрисы и пересекаются в точке . Найти , если , , .

Дано: ; , – биссектрисы , , , , .

Найти .

**Решение.**

I способ (без использования теоремы Менелая).



1. Пусть , тогда по условию (, ):
2. Так как – биссектриса по условию, то (биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника):

То есть, если , то

1. Так как – биссектриса по условию, то (биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника):

То есть, если , то

1. Сделаем дополнительное построение: проведём отрезок (рис.24).
2. Рассмотрим и .

– общий угол для и ;

как соответственные углы, образованные при пересечении параллельных прямых и ( по дополнительному построению) секущей , .

Следовательно, по двум углам.

Итак, – коэффициент подобия:

И, значит,

1. Рассмотрим и .

как вертикальные углы;

как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых и ( по дополнительному построению) секущей , .

Следовательно, по двум углам.

Итак, – коэффициент подобия:

Но, так как по доказанному:

то мы получаем, что:

То есть, если , то .

1. Рассмотрим и .

и имеют общий угол – , поэтому площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих .

Итак,

Следовательно,

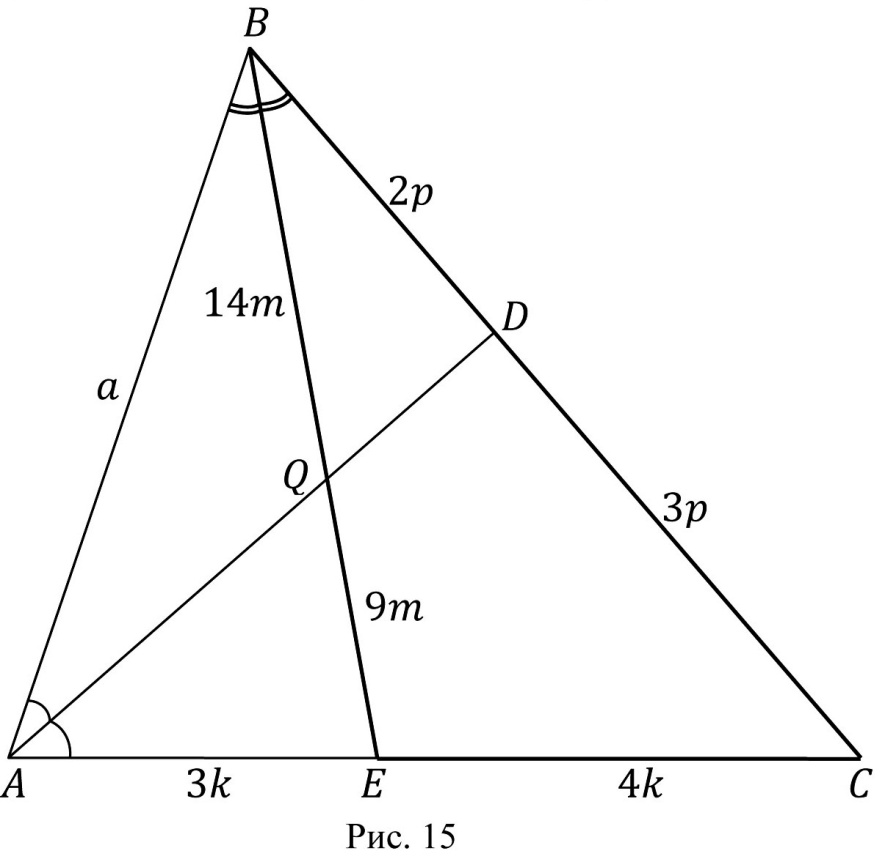
По условию задачи , поэтому,

1. Рассмотрим и .

Основания и лежат на одной прямой (прямой ), а вершина общая. Поэтому у этих треугольников будет и общая высота , значит,

Ответ: .

II способ (c использованием теоремы Менелая).

****

1. Пусть , тогда по условию (, ):
2. Так как – биссектриса по условию, то (биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника):

То есть, если , то

1. Так как – биссектриса по условию, то (биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника):

То есть, если , то

1. Прямая пересекает две стороны (, ) и продол­жение третьей ( – луч, ), значит, по теореме Менелая:

И, значит,

То есть, если , то .

1. Рассмотрим и .

и имеют общий угол – , поэтому площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих .

Итак,

Следовательно,

По условию задачи , поэтому,

1. Рассмотрим и .

Основания и лежат на одной прямой (прямой ), а вершина общая. Поэтому у этих треугольников будет и общая высота , значит,

Ответ: .

# Заключение.

Теоремы Чевы и Менелая не изучаются в основном курсе геометрии 7–9 классов. Но трудности, связанные с освоением этих теорем, оправданы их применением при решении задач.

Решение задач с помощью теорем Чевы и Менелая более рационально, чем их решение другими способами, требующими дополнительных действий и построений, которые не всегда оказываются очевидными.

Я считаю, что теоремы Чевы и Менелая должны быть включены в основной курс геометрии 7–9 классов, так как решение задач с помощью этих теорем развивает мышление и логику учеников.

Теоремы Чевы и Менелая также помогают быстро и оригинально решить задачи повышенной сложности, в том числе и задачи уровня *С* единого государственного экзамена.

# Список используемой литературы.

* + 1. Аксёнова М. Энциклопедия для детей. Том 11. Математика/ В. Володин. – М.: Аванта+, 2004.
    2. Атанасян Л.С. Геометрия, 7–9: Учебник для общеобразовательных учреждений/ В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина. – М.: Просвещение, 1996.
    3. Атанасян Л.С. Геометрия. Дополнительные главы к школьным учебникам 8, 9 классов: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики/ В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, С.А. Шестаков, И.И. Юдина. –12–е издание.– М.: Просвещение, 2002.
    4. Мадер В.В. Полифония доказательств. – М.: Мнемозина, 2009.
    5. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Часть I. – M.: МЦНМО, 2001.